Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 2 **SoSe 2015** **Abgabe: 30.04.2015**

[H4] Messwerte einer Messapparatur (3 Punkte)

Einer Messapparatur entspreche in der $\{|x\rangle, |y\rangle\}$-Basis die Matrix

$$A \doteq \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2(1-\mathrm{i}) \\ 2(1+\mathrm{i}) & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Messwerte a sind möglich? Man bestimme die zugehörigen (normierten) Eigenzustände $|\phi_a\rangle$.

(b) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten W_a werden die Werte a erhalten, wenn sich das System unmittelbar vor der Messung im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}|x\rangle + |y\rangle\right)$$

befindet?

(c) Berechnen Sie bezüglich $|\psi\rangle$ den mittleren Messwert $\langle A\rangle$ und die Schwankung ΔA, wobei $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle$.

[H5] Kommutierende Operatoren (4 Punkte)

In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ seien zwei Operatoren durch ihre Wirkung auf die Vektoren der orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned}
A|e_1\rangle &= 3|e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle\,, & B|e_1\rangle &= |e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle\,,\\
A|e_2\rangle &= \mathrm{i}\sqrt{2}|e_1\rangle + 2|e_2\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_3\rangle\,, & B|e_2\rangle &= -\mathrm{i}\sqrt{2}|e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_3\rangle\,,\\
A|e_3\rangle &= |e_1\rangle + \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + 3|e_3\rangle\,, & B|e_3\rangle &= |e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle + |e_3\rangle\,,
\end{aligned}$$

(a) Man gebe die den Operatoren A und B bzgl. dieser Basis zugeordneten Matrizen an.

(b) Zeigen Sie, dass die Operatoren A und B hermitesch sind und dass sie miteinander kommutieren.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B, deren Vielfachheiten sowie eine Orthonormalbasis $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$ simultaner Eigenzustände von A und B. *Hinweis*: Betrachten Sie das Eigenwertproblem zu A. Bestimmen Sie zuerst den Eigenvektor $|f_1\rangle$ zum einfachen Eigenwert. Ein Eigenvektor zum doppelten Eigenwert lautet $|f_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|e_1\rangle - \mathrm{i}\sqrt{2}|e_2\rangle - |e_3\rangle\right)$. Konstruieren Sie den dritten Eigenvektor orthogonal zu $|f_1\rangle$ und $|f_2\rangle$.

(d) Welche Matrizen sind A und B bzgl. der Basis $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, |f_3\rangle\}$ zugeordnet?

[H6] Dichtematrix für einen teilweise polarisierten Lichtstrahl (3 Punkte)

Man betrachte einen teilweise polarisierten Lichtstrahl. Es seien p_R und p_L der Anteil der rechtspolarisierten bzw. linkspolarisierten Photonen.

(a) Wie lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|R\rangle, |L\rangle\}$?

(b) Wie lautet die Dichtematrix in der Basis $\{|x\rangle, |y\rangle\}$?

(c) Man überprüfe $\rho^2 \neq \rho$ und $\mathrm{tr}\rho^2 < 1$.